سیستم های اسپینی- بخش دوم

تقریب براگ ـ ویلیامز، دوگانی کرامرز-وانیر، حل دقیق مدل آیزینگ دوبعدی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۸ اردیبهشت ۱۴۰۳

۱ مقدمه

در درس گذشته مدل آیزینگ را به عنوان ساده ترین مدل از برهم کنش های اسپین ها در یک بعد به صورت دقیق حل کردیم. انگیزه اصلی برای پرداختن به مدل آیزینگ و مدلهای مشابه آن این است که بتوانیم بفهمیم در یک دستگاه بس ذره ای از دل بی نظمی و تلاطمات گرمایی از یک سو و برهم کنش های دو به دوی ذرات چگونه نظم سرتاسری و همبستگی های بلند برد ظهور می کند. این پدیده یعنی ظهور نظم از دل بی نظمی یکی از مهم ترین و شایع ترین پدیده هایی است که در دستگاه های بس ذره ای رخ می دهد. یخ بستن آب، پیدایش مغناطش در جامدات، جدایی فازها در آلیاژهای دوگانه، پدیدار شدن ابررسانی و ابرشارگی و ده ها مثال دیگر تنها نمونه هایی از این گذار فاز [۱] هستند.

دیدیم که حل میدان متوسط چگونه در این بعد دچار خطای فاحش می شود و پیش بینی می کند که در این وقتی که دما پایین تر از یک دمای بحرانی است، مغناطش خود بخود پدیدار می شود، در حالیکه حل دقیق نشان می دهد که مغناطش خود بخود هرگز در یک بعد رخ نمی دهد مگر در دمای صفر مطلق. بنابراین سوالی که با آن مواجهیم این است که آیا ممکن است در ابعاد بالاتر هم تقریب میدان متوسط به اشتباه پیدایش نظم خود به خود را پیش بینی کند؟ در واقع سوالی که در اواسط دهه پنجاه میلادی برای همه فیزیکدان ها مطرح بود، سوالی عمیق تر از محدوده

[۱] Phase Transition

اعتبار تقریب میدان متوسط بود. سوال این بود که با شروع از یک عبارت یکتا برای برهم کنش های میکروسکوپی یا همان هامیلتونی و با کاربرد مکانیک آماری ، آیا اساساً می توان فازهای مختلف ماده را توصیف کرد یا این که برای هر فاز یک برهم کنش میکروسکوپی لازم است. در واقع سوال این بود که چگونه ممکن است با شروع از یک هامیلتونی یکتا هم بخار آب را توضیح داد و هم آب را و هم یخ را؟

این مدل یکی از مهم ترین مدلهای مکانیک آماری است. اهمیت این مدل تنها به خاطر این نیست که مدل ساده ای برای مطالعه نظم خود بخود مغناطیسی در جامدات فرومغناطیسی یا پادفرومغناطیسی است بلکه در این است که تعداد بسیار زیادی از پدیده های دیگر را چه در فیزیک و چه در دیگر شاخه های علوم می توان به این مدل یا تغییراتی از این مدل نگاشت. هم چنین مدل آیزینگ خاستگاه بسیاری دیگر از مدل های دقیقا حل پذیر در مکانیک آماری شده است. بسیاری از روش های حل دقیق مدل های بس ذره ای که امروزه می شناسیم نخستین بار در مطالعه مدل آیزینگ معرفی شده اند. در این درس مدل آیزینگ را نخست در یک بعد و سپس در دو بعد مطالعه می کنیم. اگر چه راه های متنوعی برای حل تقریبی مدل آیزینگ وجود دارد، در این درس تمرکز ما روی حل های دقیق این مدل است.

---

۲ حل تقریبی مدل آیزینگ به روش براگ-ویلیامز

[۲] در تقریب میدان متوسط به یک معنا فرض کردیم که همبستگی بین اسپین ها وجود ندارد. در واقع تابع احتمال اسپین ها را به صورت حاصل ضربی از توابع احتمال تک تک اسپین ها در نظر گرفتیم. حال در روش ابداع شده توسط براگ و ویلیامز کمی از این تقریب فراتر می رویم و همبستگی ها را در نظر می گیریم. البته روشی که برای در نظر گرفتن این همبستگی ها به کار می بریم بازهم تقریبی است. ولی از نادیده گرفتن آنها مسلما بهتر است. یک شبکه منظم که الزاما دوبعدی هم نیست در نظر بگیرید. تعداد همسایه های هر اسپین را z می گیریم. (بنابراین برای شبکه دو بعدی مربعی این عدد برابر با ۴ و برای شبکه سه بعدی مکعبی برابر با ۶ است.) تعداد کل اسپین ها را برابر با N می گیریم. می دانیم که تابع پارش با جمع روی وضعیت های اسپین ها یعنی $(s_1, s_2, \cdots s_N)$ ها بدست می آید. اما کمی که فکر کنیم معلوم می شود که متغیرها یی که باید روی آن ها جمع بزنیم کمتر هستند. در هر میکروحالتی فرض کنید که تعداد اسپین های مثبت برابر با N_+ و تعداد اسپین های منفی برابر

[۲] Bragg-Williams

با N_- است. بنابراین

$$N_+ + N_- = N.$$

حال در همین میکروحالت داریم:

$$\begin{aligned} N_{++} &= \text{تعداد اسپین های ++ در کنار هم} \\ N_{--} &= \text{تعداد اسپین های ـ ـ در کنار هم} \\ N_{+-} &= \text{تعداد اسپین های ـ + در کنار هم} \end{aligned} \quad (۱)$$

به این ترتیب می توان انرژی یک میکروحالت را به شکل زیر نوشت:

$$E = -J\left(N_{++} + N_{--} - N_{+-}\right) - B(N_+ - N_-) \quad (۲)$$

اما همه این متغیرها از یکدیگر مستقل نیستند. در واقع داریم:

$$N_+ + N_- = N. \quad (۳)$$

اما روابط بیشتری بین متغیرها نیز وجود دارد. برای فهم این روابط به استدلال زیر توجه می کنیم. یک میکروحالت مشخص را در نظر بگیرید. اسپین های مثبت را در این میکروحالت، حول هر اسپین مثبت z تا اتصال وجود دارد. بنابراین تعداد اتصالات حول همه اسپین های مثبت برابر است با zN_+. از این تعداد اتصال تعداد N_{++} تای آنها در حالت $++$ هستند و بقیه در حالت N_{+-}. البته وقتی این کار را برای همه اسپین های مثبت انجام دهیم متوجه می شویم که اتصالات $++$ دو بار شمرده می شوند. بنابراین داریم:

$$zN_+ = 2N_{++} + N_{+-} \quad (۴)$$

همین کار را می توانیم برای اسپین های منفی انجام دهیم و بدست آوریم:

$$zN_- = 2N_{--} + N_{+-}. \quad (۵)$$

بنابراین بین پنج متغیری که داشتیم سه رابطه بدست آوردیم که نشان می دهد تعداد متغیرهای مستقل دو تا بیشتر نیست. می توانیم هر دو متغیری را که می خواهیم به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب کنیم. به عنوان مثال متغیرهای N_+ و N_{++} را انتخاب می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$N_- = N - N_+, \quad N_{+-} = zN_+ - 2N_{++}, \quad (۶)$$

و

$$N_{--} = \frac{1}{2}(z(N - N_+) - (zN_+ - 2N_{++})) = \frac{1}{2}(zN - 2zN_+ + 2N_{++}) \quad (۷)$$

در نتیجه انرژی هر میکروحالت به شکل زیر نوشته خواهد شد:

$$E(N_+, N_{++}) = -\frac{J}{2}zN - J(4N_{++} - 2zN_+) - B(2N_+ - N) \quad (۸)$$

و تابع پارش نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$Z = e^{\frac{\beta J z N}{2}} \sum_{microstates} e^{\beta J(4N_{++}+2zN_+)+\beta B(2N_+-N)}. \quad (۹)$$

در این تابع پارش می بایست روی تمام میکروحالت ها جمع بزنیم. اگر انرژی را توانسته بودیم تنها به N_+ ربط دهیم،این تابع پارش به راحتی و بدون هیچ تقریبی حساب می شد. در واقع می نوشتیم:

$$Z = \sum_{N_+=0}^{N} \binom{N}{N_+} e^{-\beta E(N_+)}. \quad (۱۰)$$

ولی انرژی تابع N_{++} هم هست. بنابراین می بایست در یک تقریب N_{++} را به N_+ مرتبط کنیم. ابتکار براگ و ویلیامز در همین نکته است. برای فهم آن دقت می کنیم که در این سیستم اسپینی می توان یک نوع نظم بلند برد را تعریف کرد که در واقع چیزی نیست جز همان مغناطش ایجاد شده که به صورت زیر تعریف می شود:

$$m := \frac{N_+ - N_-}{N} = \frac{2N_+ - N}{N}, \quad (۱۱)$$

یا

$$N_+ = N\frac{1+m}{2}. \quad (۱۲)$$

علاوه بر این یک نوع نظم کوتاه برد هم در این سیستم اسپینی قابل تشخیص است. این نظم کوتاه برد را به این صورت تعریف می کنیم. از خود می پرسیم که یک اسپین مثبت چه درصدی از اسپین های همسایه اش را با خود همراستا می کند. هر چه که این درصد بالاتر باشد نظم کوتاه برد بیشتر است. بنابراین تعریف می کنیم:

$$q := \frac{N_{++}}{\frac{1}{2}zN}, \quad (۱۳)$$

یا

$$N_{++} = \frac{1}{2} z N (\frac{1+m}{2})^2. \quad (۱۴)$$

تقریب براگ ـ ویلیامز، مبتنی بر این فرض است که آن نظم بلند برد نتیجه مستقیم همین نظم کوتاه برد است، یعنی

$$\frac{N_{++}}{\frac{1}{2} z N} = (\frac{N_+}{N})^2, \quad (۱۵)$$

یا

$$q = (\frac{1+m}{2})^2. \quad (۱۶)$$

با جایگذاری این مقادیر در عبارت (۸) انرژی را بر حسب متغیر m بدست می آوریم. پس از ساده کردن این عبارت خواهیم داشت:

$$E = -N\Big[Jz\frac{m^2}{2} + Bm\Big]. \quad (۱۷)$$

هم چنین می توانیم از تقریب استرلینگ استفاده کنیم و بنویسیم:

$$\begin{aligned} \binom{\ln(N}{N_+)} &= \ln N! - \ln N+! - \ln(N-N_+)! = N\ln N - N_+ \ln N_+ - (N-N_+)\ln(N-N_+) \\ &- N\Big[(\frac{1+m}{2})\ln(\frac{1+m}{2}) + (\frac{1-m}{2})\ln(\frac{1-m}{2})\Big] =: NH(m). \end{aligned} \quad (۱۸)$$

از آنجا که N_+ هر مقداری را از صفر تا N اختیار می کند، m هر مقدار پیوسته ای را بین -1 و 1 اختیار می کند. بنابراین تابع پارش به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$Z = \int dm e^{\beta N\Big[H(m) + Jz\frac{m^2}{2} + Bm\Big]} = \int dm e^{\beta F(m)}. \quad (۱۹)$$

از آنجا که N خیلی بزرگ است، این انتگرال را می توان با استفاده از تقریب نقطه زینی حل کرد. پاسخ اش برابر است با:

$$Z \approx e^{F(m_0)}\sqrt{2\pi|F''(m_0)|} \quad (۲۰)$$

که در آن m_0 نقطه ای است که در آن تابع $F(m)$ ماکزیمم است. این نقطه ماکزیمم با حل معادل زیر بدست می آید:

$$F'(m)\mid_{m=m_0} = 0 \quad (۲۱)$$

و یا

$$-\frac{1}{2}\ln(\frac{1+m_0}{2}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{1-m_0}{2}) + \beta J z m_0 + B = 0. \quad (۲۲)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که این معادله را می توان به شکل زیر نوشت:

$$m_0 = \tanh(\beta(Jzm_0 + B)). \qquad (۲۳)$$

این رابطه در واقع معادله حالت این سیستم مغناطیسی را نشان می دهد و در غیاب میدان مغناطسی به رابطه آشنای $m_0 = \tanh \beta J z m_0$ تبدیل می شود که در درس های گذشته با آن آشنا شده ایم و نشان می دهد که در دمای $T < T_0 := \frac{Jz}{k}$ این سیستم دارای مغناطش خود بخود است.

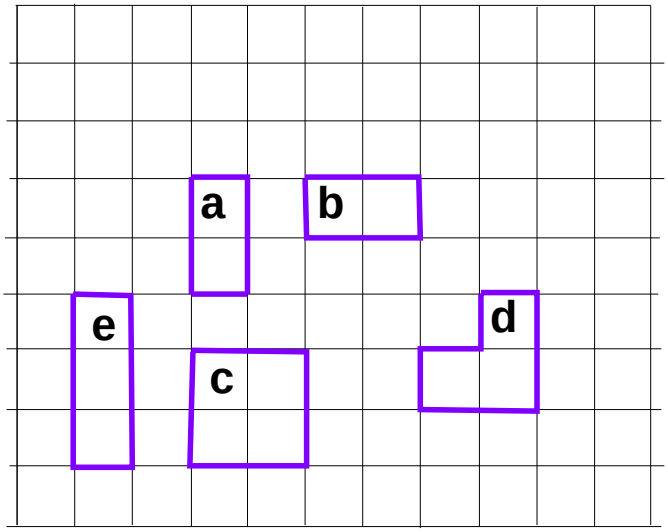
---

۳ مدل دو بعدی آیزینگ

در این بخش به بررسی حل دقیق مدل آیزینگ دو بعدی می پردازیم. نخستین بار لارس آنساگر [۳] در دهه ۱۹۴۰ توانست حل دقیق این مدل را البته در میدان مغناطیسی صفر بدست آورد و نشان دهد که این مدل واقعا در یک دمای محدود دچار گذار فاز شده و دارای مغناطش خود به خود می شود. حل آنساگر مبتنی بر روش ماتریس انتقال است. همانطور که می توانید حدس بزنید ماتریس انتقال برای مدل دوبعدی که دارای N سطر و N ستون است یک ماتریس 2^N بعدی است و بنابراین پیداکردن بزرگترین ویژه مقدار آن به صورت تحلیلی و دقیق کار بسیار دشواری است. اهمیت کار آنساگر نیز این است که توانسته است این کار را انجام دهد و برای اولین بار به طور دقیق نشان دهد که گذار فاز ممکن است. از آن هنگام تا کنون نه تنها روش های مختلفی برای حل مدل آیزینگ کشف شده است بلکه مدل های متنوع دیگری نیز در دوبعد تعریف شده اند که به صورت دقیق قابل حل هستند. امروزه شاخه ای از فیزیک تحت نام «مدل های حل پذیر» [۴] یا« مدل های انتگرال پذیر» [۵] به مطالعه این نوع مدل ها هم در مکانیک آماری و هم در نظریه میدان و ارتباط آنها با یکدیگر می پردازد. در این بخش ما نخست به معرفی دو نوع بسط برای حل اختلالی مدل آیزینگ می پردازیم و سپس یک مفهوم مهم فیزیکی به نام دوگانی [۶] را معرفی می کنیم که به کمک آن می توان نقطه گذار فاز را به فرض وجود به طور دقیق بدست آورد. دست آخر یک روش حل برای مدل آیزینگ دوبعدی را مطالعه می کنیم.

---

[۳] Lars Onsager
[۴] Exactly Solvable Models
[۵] Integrable Models
[۶] Duality



شکل ۱: حلقه های بسته در شبکه آیزینگ دو بعدی .

۱.۳ بسط دمای بالا

بسط دمای بالا یک روش اختلالی است که در دماهای بالا یعنی وقتی که $kT >> J$ باشد و سیستم تقریبا بی نظم باشد، مفید است. در واقع پارامتر بسط بستگی مستقیم به مقدار $\frac{J}{kT}$ دارد و بنابراین هر چه که دما بالاتر باشد می توان با جملات کمتری در بسط اختلالی تابع پارش مدل آیزینگ را با دقت خوب بدست آورد.

می دانیم که هامیلتونی مدل آیزینگ به شکل زیراست:

$$H = -J \sum_{i,j}{}' s_i s_j. \qquad (۲۴)$$

تابع پارش عبارت است از

$$Z = \sum_S e^{\beta J \sum'_{i,j} s_i s_j} \equiv \sum_{s_1, s_2, \cdots s_N} \prod_{links} e^{\beta J s_i s_j}. \qquad (۲۵)$$

براحتی می توان نشان داد که رابطه زیر همیشه برقراراست. صحت این رابطی متکی به این است که $s_i s_j$ همواره یا یک است و یا منهای یک

.

$$e^{K s_i s_j} = \cosh K + s_i s_j \sinh K = \cosh K (1 + s_i s_j \tanh K) =: \cosh K (1 + s_i s_j \tau) \qquad (۲۶)$$

درنتیجه می توان تابع پارش را به شکل زیر بازنویسی کرد که درآن $\tau = \tanh \beta J$.

$$Z_N(\beta J) = \sum_S \prod_{links} \cosh \beta J(1 + s_i s_j \tau) = (\cosh \beta J)^L \sum_S \prod_{links} (1 + s_i s_j \tau) \qquad (۲۷)$$

که درآن L تعداد تمام اتصالات شبکه است. برای یک شبکه مربعی در دو بعد که N تا اسپین دارد تعداد این اتصالات برابراست با $L = 2N$.

دراین جا فرض کرده ا یم که شرایط مرزی پریودیک برقراراست.

می توان این عبارت را برحسب قوای متوالی τ بسط داد. جملات اول بسط به ترتیب زیر خواهند بود :

$$\begin{aligned} Z &= (\cosh K)^L \sum_S \prod_{links} (1 + s_i s_j \tau) \\ &= (\cosh K)^L \sum_S \left(1 + \tau(\sum_{links} s_i s_j) + \tau^2(\sum_{doublelinks} s_i s_j s_k s_l) + \tau^3(\sum_{triplelinks} s_i s_j s_k s_l s_m s_n) + \cdots \right) \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

که درآن ها $\sum_{doublelinks}$ به معنای جمع روی جفت های اتصالات مختلف و $\sum_{triplelinks}$ به معنای جمع روی تمام اتصالات سه تایی مختلف است والی آخر.

دقیت کنید که متناظر با هر $s_i s_j$ یک اتصال در شبکه وجود دارد.

ازآنجا که دردمای های بالا τ کوچک است و می توانیم این عبارت را برحسب قوای τ بسط دهیم ااین بسط به بسط دمای بالا مشهوراست. حال توجه می کنیم که روابط زیر همیشه برقرارند که درآن ها $\sum_S$ به معنای جمع روی وضعیت همه اسپین های شبکه است.

$$\sum_s 1 = 2 \qquad \sum_s s = 0 \qquad (۲۹)$$

و

$$\sum_S 1 = 2^N \qquad \sum_S s_i = 0 \qquad (۳۰)$$

درنتیجه درجمع های بالا عبارت هایی مثل عبارت زیر که درآن ها حتی یکی از s ها به صورت منفرد ظاهر شده باشد برابر باصفر خواهندبود:

$$\sum_S s_i s_j \cdots s_k = 0 \qquad (۳۱)$$

تنها عبارت هایی مخالف صفر خواهند بود که درآن هرکدام از s ها به صورت جفت ظاهر شده باشد. این حرف به این معناست که دررابطه (28) تنها جملاتی باقی خواهند ماند که اتصالات مربوط به آنها مانند شکل (1) یک منحنی بسته تشکیل دهند . یعنی

$$Z = (\cosh K)^{2N} 2^N \sum_{Loop} \tau^{l_{Loop}} \qquad (۳۲)$$

که درآنN_l تعداد منحنی های بسته به طول l است.

که درآن جمع روی تمام منحنی های بسته است و l_{loop} محیط یک حلقه است و $Q(\tau)$ تابع مولد تعداد این منحنی هاست. می توان این رابطه را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$Z_N(K) = (\cosh K)^{2N} 2^N \sum_{l=0}^{\infty} N_l \tau^l = (\cosh K)^{2N} 2^N Q_N(\tau) \qquad (۳۳)$$

که درآن N_l تعداد منحنی های بسته به طول l است. دقت کنید که پارامتر τ وقتی که $\frac{J}{kT}$ کوچک باشد کوچک است به همین مناسبت این بسط را بسط دمای بالا می نامند.

۲.۳ بسط دمای پایین

در بخش گذشته بسط دمای بالا را مطالعه کردیم که بسطی است در فاز بی نظم. حال یک نوع دیگر بسط را مطالعه می کنیم که برای دماهای پایین مناسب است. برای فهم این بسط هامیلتونی را به شکل زیر می نویسیم:

$$H = J \sum_{i,j} (1 - s_i s_j) - 2N = H_0 - 2NJ \qquad (۳۴)$$

دقت کنید که این هامیلتونی با هامیلتونی قبلی متفاوت نیست تنها به شکل متفاوتی نوشته شده است. می توانیم بنویسیم:

$$Z_N = e^{2\beta NJ} \sum_{\{s\}} e^{-\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - s_i s_j)} \qquad (۳۵)$$

دقت کنید که با کم و زیاد کردن یک مقدار ثابت هامیلتونی را به شکلی نوشته ایم که به وضوح نشان می دهد حالت منظم یعنی حالتی که همه اسپین ها مثل هم هستند مقدار انرژی صفر دارد. و هر دو اسپین مجاوری که مثل هم نباشند مقدار انرژی را به اندازه $2J$ بالا می برند. بنابراین اگر

یک حالت منظم مثل حالتی که همه اسپین ها در حالت $+1$ هستند را در نظر بگیریم این حالت انرژی صفر دارد. حال حالتی را در نظر بگیرید که در آن ها جزیره ای از اسپین ها برگشته اند و مقدار -1 را اختیار کرده اند. اگر محیط این جزیره برابر با l باشد، آنگاه انرژی این حالت برابراست با $2Jl$. دقت کنید که مهم نیست که این جزیره یک پارچه یا دو پارچه یا چندپارچه باشد. از انجا که طول کل محیط آن برابر با l است انرژی آن برابر با $2Jl$ است. هر حالت دیگری را که در نظر بگیریم چیزی نیست جز جزیره هایی که در آنها اسپین ها برگشته اند و در نتیجه انرژی آن ها برابر است با $2J$ برابر طول کل محیط این جزیره ها. بنابراین تابع پارش را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$Z_N = e^{2\beta NJ} \sum_{l=0}^{\infty} N_l e^{-2\beta Jl} \tag{۳۶}$$

دیده می شود که تابعی که در این بسط نیز وجود دارد همان تابع Q است اگر چه متغیر درون آن تغییر کرده است. بنابراین داریم

$$Z_N = e^{2\beta NJ} Q_N(e^{-2\beta J}). \tag{۳۷}$$

---

۴ دوگانی

در درس های مقدماتی ریاضی با توابع زوج و فرد آشنا شده ایم. زوج و فرد بودن یک تقارن خیلی ساده است که باعث می شود با داشتن مقدار تابع برای یک متغیر، مقدار آن را برای یک مقدار دیگر از متغیر نیز بدست آوریم. یک تابع تناوبی نمونه دیگری از یک تابع متقارن را نشان می دهد. یک مثال دیگر تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ است . هرگاه مقدار این تابع را برای$x = 10$ بدانیم مقدار آن نیز برای $x = 0.1$ نیز می دانیم. حال از خود سوال می کنیم که آیا ممکن است که تابع پارش مدل آیزینگ نیز به نوعی چنین خاصیتی داشته باشد؟ آیا ممکن است که تابع پارش مدل آیزینگ در دماهای بالا و پایین به هم مرتبط باشند؟ البته طبیعتا انتظار داریم که این ارتباط در صورت وجود یک رابطه ساده مثل زوج بودن یا نظیر آن نباشد. نخستین بار کرامرز و وانیر [۷] متوجه شدند که این دو بسط کاملا شبیه به هم هستند و به هم قابل تبدیل شدن هستند. آنها از این خاصیت استفاده کردند و با فرض اینکه یک گذار فاز وجود داشته باشد توانستند دمای گذار را به طور دقیق بدست آورند. این رابطه یعنی رابطه تابع پارش مدل آیزینگ در دمای بالا و در دمای پایین به دوگانی کرامرز- وانیر معروف است [۸] .

[۷] Krammers and Wannier

[۸] Krammers-Wannier Duality

در این بخش سعی می کنیم دوگانی کرامرز- وانیر را بفهمیم. فرض کنید که یک مدل آیزینگ با ثابت برهم کنش J داریم. هرگاه بسط دمای بالا را برای تابع پارش این مدل را در دمای T بنویسیم خواهیم داشت:

$$Z_N(K) = 2^N(\cosh K)^{2N} Q_N(\tanh K) \qquad (۳۸)$$

که در آن $K = \frac{J}{kT}$. حال فرض کنیدکه برای این مدل تابع پارش را در دمای T' بنویسیم و از بسط دمای پایین استفاده کنیم. آنگاه بنابر رابطه (۳۷) خواهیم داشت:

$$Z_N(K') = e^{2K'N} Q_N(e^{-2K'}), \qquad (۳۹)$$

که درآن $K' = \frac{J}{kT'}$. آیا رابطه ای بین این دو تابع پارش یعنی تابع پارش یک مدل در دمای بالا و دمای پایین وجود دارد؟ دقت کنید که محاسبه تابع پارش برای مدل آیزینگ کار بسیار سختی است. اما علیرغم این سختی شاید بتوانیم چنین رابطه ای را پیدا کنیم. دلیل این کار هم این است که وقتی به رابطه های (۳۸،۳۹) نگاه می کنیم می بینیم که هر دوی آنها بر حسب یک تابع نوشته شده اند اگرچه در این تابع متغیرهای متفاوتی برای دمای بالا و پایین به کار رفته است. خود این تابع را با سختی بسیار می توان حساب کرد ولی دراین جا نیازی به محاسبه آن نداریم تنها این مهم است که در هردو تابع پارش این تابع به کار رفته است. برای فهم رابطه دوگانی تنها کاری که باید بکنیم این است که تابع Q_N را بین دو عبارت تابع پارش (۳۸، ۳۹) حذف کنیم. البته لازمه این کار این است که متغیرهای دو تابع را با هم مساوی قرار دهیم. بنابراین قرار می دهیم

$$e^{-2K'} = \tanh K. \qquad (۴۰)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که رابطه بالا معادل است با رابطه زیر:

$$\sinh 2K \sinh 2K' = 1. \qquad (۴۱)$$

دقت کنید که این رابطه بیان می کند وقتی $K = \frac{J}{kT}$ کوچک است $K' = \frac{J}{kT'}$ بزرگ است و بالعکس. این امر به این معناست که وقتی T بزرگ باشد، T' کوچک است و بالعکس.

حال برای هر دو دمایی که در رابطه (۴۱) صدق کنند داریم:

$$\frac{Z_N(K)}{2^N(\cosh K)^{2N}} = \frac{Z_N(K')}{e^{2K'N}}. \qquad (۴۲)$$

این همان رابطه ای است که می خواستیم یعنی تابع پارش مدل آیزینگ در دو دمای متفاوت که یکی بالاتر از J/k و دیگری پایین تر از J/k است به هم ربط داده شده اند. بازهم برمی گردیم به مثال ساده ای که در ابتدای این بخش به آن اشاره کردیم . فرض کنید به ما بگویند که یک

تابع زوج تنها در یک نقطه غیرتحلیلی است یعنی یا خودش یا یکی از مشتق هایش ناپیوسته است. به نظر شما این نقطه چه نقطه ای است؟ آیا می توانید بدون دانستن شکل دقیق تابع تنها با اطلاعات داده شده یعنی اینکه تابع زوج است و تنها یک نقطه تکین دارد آن نقطه را پیدا کنید؟ براحتی می توانید خودتان را قانع کنید که پاسخ این سوال مثبت است و نقطه مورد نظر نقطه 0 است.

■ **تمرین:** هرگاه به شما بگویند که یک تابع دارای تقارن

$$f(x) = f(\frac{1}{x}) \qquad (۴۳)$$

است و تنها یک نقطه غیرتحلیلی دارد، آن نقطه کدام است؟

بعد از این مثال ساده به رابطه (۴۲) توجه می کنیم. برای وضوح بیشتر از طرفین رابطه (۴۲) لگاریتم می گیریم و طرفین را بر واحد تعداد ذرات حساب می کنیم. با تعریف $f := \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{\ln Z_N}{N}$ بدست می آوریم

$$f(K) = f(K') + \ln 2(\cosh K)^2 - 2K' \qquad (۴۴)$$

از استدلال و مشاهده فیزیکی می دانیم که در مدل آیزینگ، در صورت وجود، تنها یک نقطه گذار فاز وجود دارد یعنی این مدل تنها دو فاز یکی منظم و دیگری بی نظم دارد و اگر تابع پارش اش یا تابع انرژی آزاد، دارای تکینگی باشد این تکینگی فقط در یک نقطه است. یعنی نقطه ای که شرط $K = K'$ برقرار می شود. بنابراین نقطه گذار فاز با توجه به این تساوی و رابطه (۴۱) از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sinh 2K_c \sinh 2K_c = 1. \qquad (۴۵)$$

■ **تمرین:** از این رابطه استفاده کنید و نشان دهید که دمای بحرانی برابراست با:

$$kT_c = \frac{2J}{\ln(1+\sqrt{2})}. \qquad (۴۶)$$

۵ حل دقیق مدل آیزینگ دوبعدی

مدل آیزینگ دوبعدی نخستین باردر سال ۱۹۴۴ توسط لارس آنساگر [۹] به روش ماتریس انتقال حل شد. برای یک شبکه مربعی $N \times N$ ماتریس انتقال یک ماتریس $2^N \times 2^N$ بعدی است. محاسبه تابع پارش این مدل در حد ترمودینامیک نیازمند بدست آوردن بزرگترین ویژه مقدار ماتریس انتقال است. هرگاه یک شبکه ۱۰ در ۱۰ داشته باشیم، ماتریس انتقال آن یک ماتریس مربعی با بعد ۱۰۲۴ است. چنین ماتریسی را با کامپیوترهای امروزی می توان براحتی قطری کرد. اما یک شبکه ۱۰ در ۱۰ با حد ترمودینامیک خیلی فاصله دارد. برای نزدیک شدن به حد ترمودینامیک شبکه را ۱۰۰ در ۱۰۰ می گیریم که شامل تنها ۱۰ هزار اسپین است. ماتریس انتقال چنین شبکه ای یک ماتریس مربعی با بعد $2^{100} \sim 10^{30}$ است که هیچ کامپیتری توانایی ذخیره کردن درایه هایش را نیز ندارد. به این ترتیب است که یم توانیم اهمیت حل دقیق مدل آیزینگ را خواه با استفاده از روش ماتریس انتقال یعنی روش اولیه آنساگر یا روش های دیگری بفهمیم. در این درس به حل آنساگر نخواهیم پرداخت و به جای آن از روش شمارش حلقه ها می پردازیم. این روش هشت سال بعد از آنساگر در ۱۹۵۲ مشترکاً توسط کتز و وارد [۱۰] ابداع شد و همان سالها نیز ریچارد فاینمن سهم مهمی در اصلاح این روش ایفا کرد. به همین دلیل می توانیم این روش را روش شمارش حلقه ها یا روش کتز_وارد_فاینمن [۱۱] بخوانیم.

بخش مقدماتی کار را قبلا انجام داده ایم به این معنا که مسئله را تبدیل کرده ایم به محاسبه تابع $Q_N(\tau)$ که نیازمند جمع روی تمام گراف های بسته در شبکه است.

$$Z_N(\beta J) = 2^N (\cosh \beta J)^{2N} Q_N(\tau) \qquad \tau := \tanh(\beta J) \tag{۴۷}$$

که در آن

$$Q_N(\tau) := \sum_{l=1} N_l \tau^l \tag{۴۸}$$

که در آن N_l تعداد تمام منحنی های بسته به طول l در شبکه است. دشواری کار دراین است که وقتی که با حلقه های با محیط زیاد سرو کار داریم انواع خیلی زیادی از این گراف ها وجود دارد که شمارش سیستماتیک آنها را دشوار می کند. با این وجود چنانچه در ادامه خواهیم دید این کار را می توان به طور دقیق انجام داد. برای ادامه بازمی گردیم به رابطه (۳۳) . هدف ما محاسبه تابع $Q_N(\tau)$ است. نخست چند مفهوم را به دقت تعریف می کنیم:

---

[۹] Lars Onsager

[۱۰] Ward and Kac

[۱۱] Kac-Ward-Feynman Method

■ **تعریف:** تابع $n(l)$ عبارت است از تعداد مسیرهای به طول l که می توانیم از یک نقطه از شبکه شروع کنیم و به همان نقطه بازگردیم بدون اینکه از یک ضلع دوبار رد شویم. تمام مسیرهایی که در نظر می گیریم می بایست یک پارچه باشند و نمی بایست خود را قطع کنند.

فرض کنید که بتوانیم جمع روی حلقه ها را برای همه حلقه های یک پارچه انجام دهیم. این تابع را برای تمیز دادنش از تابع $Q(\tau)$ با $Q^{(1)}(\tau)$ نمایش می دهیم.

$$Q^{(1)}(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} N^{(1)}(l)\tau^l, \tag{۴۹}$$

که در آن $N^{(1)}(l)$ تعداد تمام حلقه های یک پارچه به طول l است. حال سوال این است که بقیه مسیرهای چند پارچه را چه کنیم؟ پاسخ این سوال ساده است و آن اینکه می توانیم بنویسیم:

$$Q(\tau) = e^{Q^{(1)}(\tau)}. \tag{۵۰}$$

برای درک این رابطه طرف راست را بسط می دهیم:

$$Q(\tau) = 1 + Q^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2!}Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau) + \frac{1}{3!}Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau) + \cdots. \tag{۵۱}$$

جمله اول سهم همه مسیرهای یک پارچه است. جمله بعدی سهم همه حلقه های دو پارچه است و حاصل نیز بر دو تقسیم شده است تا از دوباره شماری پرهیز شود و الی آخر. به این ترتیب مسیرهایی که خودشان را قطع می کنند به عنوان مسیرهای دو یا چند پارچه شمرده می شوند. هرگاه یک مسیر دارای یک نقطه تقاطع باشد در رتبه ۲ یعنی در $Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau)$ و هر گاه یک مسیر دارای دو نقطه تقاطع باشد در رتبه سه یعنی در $Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau)$ شمرده می شود و الی آخر.

تابع $Q^{(1)}(\tau)$ نیازمند محاسبه $N^{(1)}(l)$ یعنی تعداد حلقه های بسته به طول l در تمام شبکه است. این محاسبه را می توان تقلیل داد به محاسبه تعداد حلقه های بسته به طول l که از یک نقطه مبدا مثلا نقطه $(0,0)$ شروع می کنند و به آن باز می گردند. اگر این تعداد را با $n(l)$ نشان دهیم آنگاه براحتی معلوم می شود که

$$N^{(1)}(l) = \frac{Nn(l)}{l}.$$

دلیل اش هم این است که نقطه شروع می تواند به جای A هر نقطه دیگری باشد و تعداد این نقاط N تاست. اما l تا از این نقاط یعنی نقاطی که روی مسیر هستند همگی منجر به یک مسیر می شوند و در واقع l بار شمرده می شوند. بنابراین می بایست عدد نهایی را بر l تقسیم کرد.

با این حساب تابع $Q^{(1)}(\tau)$ به شکل زیر درمی آید:

$$Q^{(1)}(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Nn(l)\tau^l}{l} \qquad (۵۲)$$

- **تعریف:** می توانیم از زاویه دیگری به این مسئله نگاه کنیم. متحرکی را در نظر بگیرید که در هر گام یک امتیاز یا وزن به اندازه τ کسب می کند. حال اگر این متحرک l قدم بردارد وزنی که اختیار می کند برابر است با τ^l. حال به این متحرک به اندازه طی کردن l گام فرصت می دهیم و کل وزنی را حساب می کنیم که در طی کردن همه مسیرهای بسته و بازگشت به نقطه اولیه کسب می کند. این وزن را با تابع $n(l,\tau) := n(l)\tau^l$ نشان می دهیم. تمام مسیرهایی که در نظر می گیریم می بایست یک پارچه باشند و نمی بایست خود را قطع کنند.

این تابع را برای مقادیر کم می توان براحتی محاسبه کرد. خواننده براحتی می تواند خود را قانع کند که در یک شبکه مربعی مقادیر زیر درست اند:

$$n(1,\tau) = n(2,\tau) = n(3,\tau) = 0 \qquad n(4,\tau) = 4\tau^4 \qquad n(6,\tau) = 12\tau^6, \qquad n(8,\tau) = c\tau^8. \qquad (۵۳)$$

- **تمرین:** ضریب تناسب c را در رابطه بالا حساب کنید.

محاسبه تابع $n(l,\tau)$ برای طول های زیاد بسیار سخت است. دلیل آن هم امتناعی است که در قطع نکردن مسیر و هم چنین دو باره طی نکردن یک ضلع وجود دارد. به این ترتیب به نظر می رسد که همه چیز در محاسبه تابع پارش مدل آیزینگ موکول شده است به محاسبه تابع $n(l,\tau)$. این استدلال تقریبا درست است اما برای اینکه حل واقعا دقیق را بدست آوریم می بایست به یک نکته خیلی مهم توجه کنیم. نکته این است که وقتی عبارت $Q^{(1)^2}(\tau)$ را حساب می کنیم مسیرهایی مثل آنچه که در شکل (d) در (۲) نشان داده شده است، نیز پدیدار می شوند. چنین مسیرهایی غیرمجازند و اصلا نمی بایست شمرده شوند. می بایست برای چنین جلوگیری از پیدایش مسیرهای غیرمجاز فکری بکنیم. دقت کنید که با محدود کردن خود به شمارش تنها مسیرهای غیرمتقاطع کاری کرده ایم که مسیرهای دارای تقاطع در رتبه های بالاتر شمرده شوند. می خواهیم که مسیرهای با یک تقاطع در رتبه دوم، مسیرهای با دو تقاطع در رتبه سوم و مسیرهای با سه تقاطع در رتبه چهارم و الی اخر شمرده شوند. برای این کار می بایست تابع رتبه یک را چنان بنویسیم که خاصیت های زیر را داشته باشد:

- **الف- همانطور که در تعریف اش گفتیم، هیچ مسیر متقاطعی در آن وجود نداشته باشد. بنابراین یک گراف مجاز مثل گراف a در شکل (۲) به عنوان یک مسیر دو پارچه و یک گراف مجاز مثل b در همان شکل به عنوان یک مسیر سه پارچه شمرده خواهند شد.**

- **ب- هیچ مسیری که در آن یک ضلع دوبار طی شده است نیز وجود نداشته باشد. بنابراین مسیری مثل مسیر c در شکل (۲) حتی در رتبه یک نباید شمرده شود.**

- **پ- در مرتبه های بالاتر مسیرهایی مثل گراف (d) در شکل (۲) پدیدار نشود.**

این کارها را مجموعا اصلاح تابع رتبه یک می خوانیم و در بخش بعدی این کار را انجام می دهیم:

۱.۵ اصلاح تابع رتبه یک

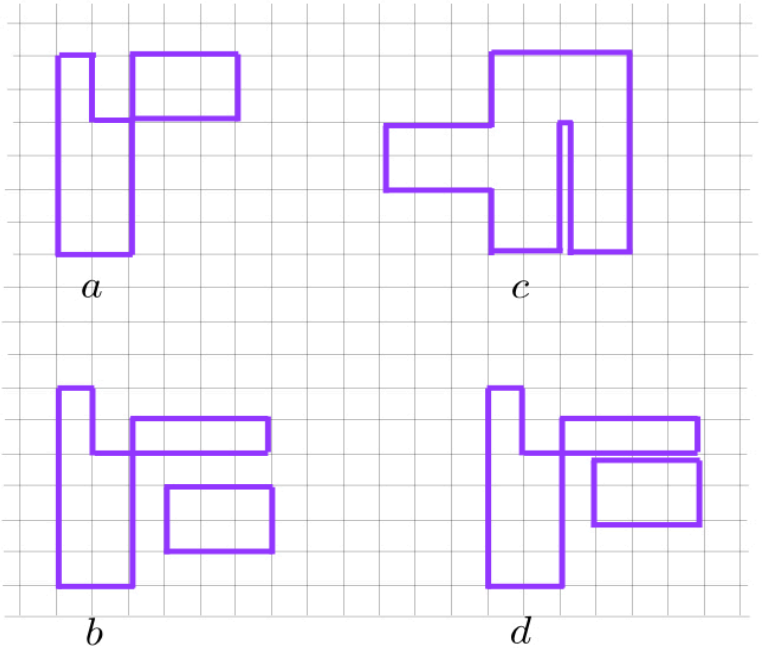
دقت کنید که اصلاح تابع رتبه یک می بایست دو کار را انجام دهد. این که هر دو کار را می توان با یک ترفند حل کرد بی اندازه زیبا و جالب است. برای اینکار به جای مسیرهای ساده مسیرهای جهت دار را در نظر می گیریم و در هر گام به نحوه حرکت متحرک در هر گام بسته به این که گام او رو به جلو یا عقب یا چرخش به راست یا چپ باشد وزن می دهیم . بجای تابع $n(l,\tau)$ تابعی که بدست می آوریم را $n_\omega(l,\tau)$ می نامیم. این تابع جمع روی تمام منحنی های یک پارچه و جهت دار به طول l است و منحنی ها می توانند خود را نیز قطع کنند.

چنانکه خواهیم دید هر مسیر یکپارچه بدون تقاطع وزن کلی -1 اختیار می کند و همه اشکالات سه گانه فوق برطرف می شوند. از آنجا که یک مسیر مجاز در دو جهت مختلف طی می شود و در هر دو جهت وزن -1 اختیار می کند، نهایتا کافی است که تابع بدست آمده را بر -2 تقسیم کنیم. بنابراین داریم:

$$n(l,\tau) = \frac{-1}{2} n_\omega(l,\tau). \qquad (۵۴)$$

حال توضیح می دهیم که چگونه وزن ها باعث برطرف شدن اشکالات سه گانه فوق می شود.

نخست برای اینکه مسیرهای متقاطع را حذف کنیم به هر مسیر یک وزن می دهیم. این وزن دهی می بایست چنان باشد که مسیرهای بدون تقاطع وزن -1 اختیار کنند و مسیرهای با تقاطع وزن های یکدیگر را خنثی کنند. وزن را به ترتیب زیر انتخاب می کنیم.



شکل ۲: گراف های مجاز در حل مدل آیزینگ. گراف های a و b مجاز و گراف های c و d غیرمجازند، چون شامل ضلع هایی هستند که دوبار طی شده اند. چنین جملاتی در بسط تابع پارش مدل آیزینگ نمی بایست پدیدار شوند.

■ **تعریف وزن مسیرها:** یک متحرک در نظر می گیریم که از نقطه ای مثل A شروع کرده و پس از طی یک مسیر جهت دار بسته به همان نقطه برمی گردد. در این صورت به هر قدم این متحرک مثل قدم l ـام وزن های زیر را نسبت می دهیم و سرانجام این وزن ها را در هم ضرب می کنیم تا وزن کل آن مسیر جهت دار بدست آید.

$$w_l = \left\{ \begin{array}{ll} e^{\frac{i\pi}{4}}, & \text{گردش به راست} \\ e^{\frac{-i\pi}{4}}, & \text{گردش به چپ} \\ 1, & \text{حرکت رو به جلو} \\ 0, & \text{حرکت به عقب} \end{array} \right\}. \qquad (۵۵)$$

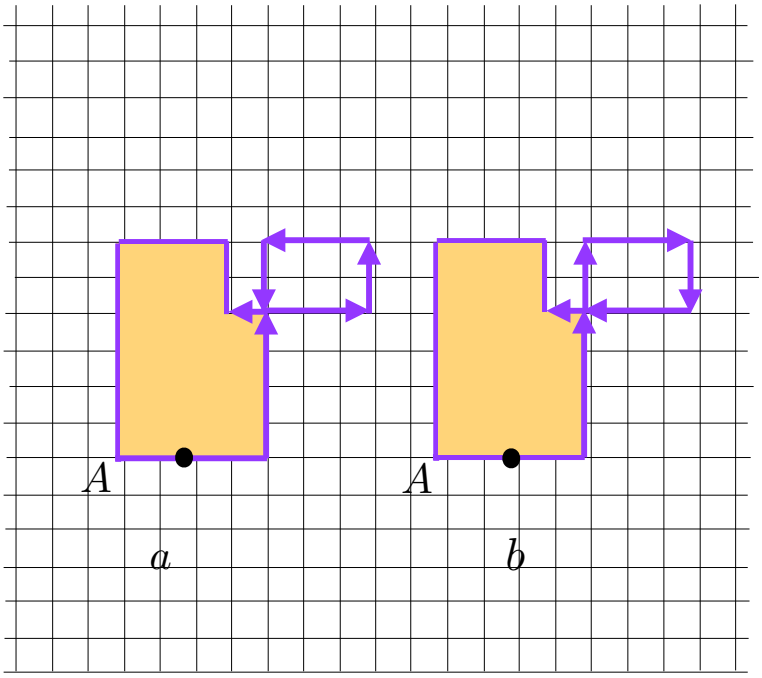
به این ترتیب یک مسیر بدون تقاطع چه در جهت راست گرد طی شود و چه در جهت چپ گرد در هر دو حالت وزنی که می گیرد برابر است با

$$\omega_{total} = \prod_l \omega_l = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = -1 \qquad (۵۶)$$

. دلیل اش هم این است که در هر دو حالت این متحرک یا زاویه π طی می کند یا زاویه $-\pi$ تا به نقطه اولیه اش برسد. از انجا که ما همه مسیرهای جهت دار ممکن را در نظر خواهیم گرفت برای آن که به هر مسیر بسته ای نهایتا وزن یک بدهیم، می بایست وزنی را که به هر مسیر می دهیم تقسیم بر -2 کنیم، زیرا این مسیر یک بار برای جهت چپ گرد و یک بار هم برای جهت راست گرد وزن -1 گرفته است. حال می خواهیم ببنیم که آیا با این شیوه وزن دادن منظور کلی ما که در ملاک های الف تا پ در بالا گفته ایم برآورده می شود یا نه.

■ الف ـ چگونگی حذف مسیرهای متقاطع در رتبه یک: شکل (۳)

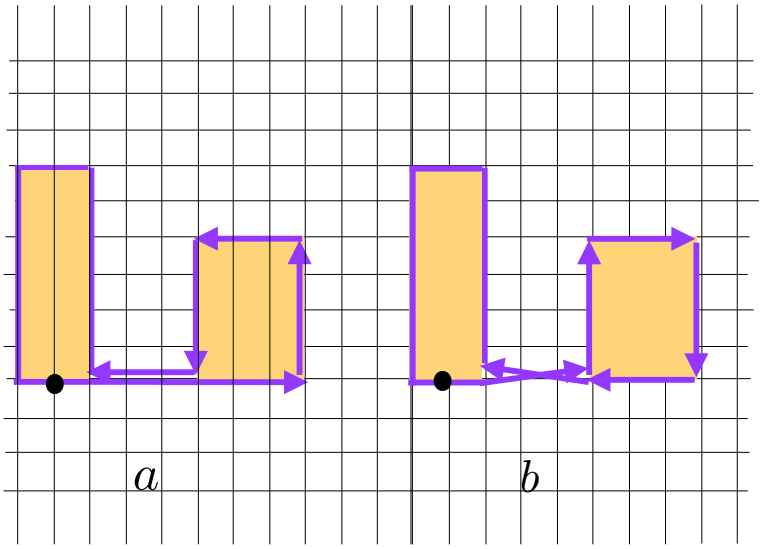
هرگاه یک مسیر بدون تقاطع را در نظر بگیریم این مسیر در دو جهت ساعت گرد یا پادساعت گرد می تواند طی شود. به این ترتیب کل وزنی که به آن داده می شود برابر با -2 است. می توانیم در پایان تعداد مسیرها را بر دو تقسیم کنیم تا عدد واقعی بدست آید. نکته اصلی این است که در رتبه یک یعنی در تابع $Q^{(1)}(\tau)$ هیچ مسیر متقاطعی شمرده نشود. بنابراین ، کارِ این وزن ها این است که به مسیرهایی که خود را قطع می کنند درهمان شمارش اولیه در رتبه یک وزن صفر بدهند و کاری کنند که این مسیرها در تابع $Q^{(1)}(\tau)$ پدیدار نشوند. برای این که ببینیم آیا این مقصود عملی می شود یا نه، یک مسیر متقاطع را در نظر بگیریم مثل مسیری که در شکل (۳) نشان داده شده است. از نقطه سیاه رنگ شروع کنید و مطابق با قاعده (۵۵) به مسیرهای شکل های a و b وزن بدهید. خواهید دید که وزن این دو یکدیگر را خنثی می کنند.



شکل ۳: هرگاه از نقطه سیاه رنگ شروع کنیم و مطابق با قاعده (۵۵) به مسیرهای شکل های a و b وزن بدهیم، مجموع وزن ها برابر با صفر خواهد بود.

■ ب- چگونگی حذف مسیرهای رتبه یک که در آن ها یک ضلع دوبار طی شده است، شکل (۴).

به مسیرهای نشان داده شده در شکل (۴) نگاه می کنیم. این مسیرها به معنایی که قبلا گفتیم متقاطع نیستند و با آنچه که در شکل (۳) دیدیم متفاوتند. چنین مسیرهایی در همان رتبه یک نمی بایست پدیدار شوند. حال باید ببینیم آیا این اتفاق رخ می دهد یا نه. اگر به دو مسیر (a) و (b) در شکل (۴) نگاه کنیم و از یک نقطه مثلا نقطه سیاه رنگ روی این مسیرها شروع کنیم و مطابق با قاعده (۵۵) به هر مسیر وزن بدهیم خواهیم دید که وزن دو مسیر یک دیگر را خنثی می کنند.



شکل ۴: بازهم از نقطه سیاه رنگ شروع کنید و مطابق با قاعده (۵۵) به گام ها وزن بدهید. خواهید دید که یکی از دیاگرام ها وزن یک و دیگری وزن منهای یک خواهد گرفت و در نتیجه این نوع دیاگرام در رتبه یک ظاهر نخواهد شد.

■ پ ـ چگونگی حذف مسیرهای غیرمجاز در رتبه های بالا، شکل (۵) .

اما یک نکته دیگر باقی مانده است و آن اینکه با وجود تمام تمهیداتی که در بندهای الف و ب چیدیم بازهم ممکن است مسیرهایی در رتبه های بالاتر پدید آیند که مجاز نباشند مثل مسیرهای سمت چپ در شکل (۵). این مسیر ها در رتبه دو از کنار هم قرار گرفتن دو مسیر غیرمتقاطع و کاملا مجاز پدیدار می شود ولی می دانیم که در تابع پارش مدل آیزینگ چنین مسیری نمی بایست وجود داشته باشد. حال می خواهیم نشان دهیم که چنین مسیری نیز به طرز معجزه آسایی حذف می شود. نحوه حذف شدن اش نیز به این ترتیب است که با یک دیاگرام مشابه در رتبه یک حذف می شود. دقت کنید که هیچ کدام از تمهیداتی که در نظر گرفته ایم مانع ظهور مسیر سمت راست در شکل (۵) در رتبه یک نمی شود. اگر به بسط مسیر ها نگاه کنیم، چنین چیزی می بینیم:

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= 1 + Q^{(1)}(\tau) + [Q^{(1)}(\tau)]^2 + \cdots = 1 + (\alpha^+ + \alpha^- + \beta^+ + \beta^- + \gamma^+ + \gamma^- + \cdots) \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha^+ + \alpha^- + \beta^+ + \beta^- + \gamma^+ + \gamma^- + \cdots)^2 + \cdots \end{aligned} \qquad (۵۷)$$

که در آن فقط به تابع $Q(\tau)$ توجه کرده ایم و ضرایب مختلف را نادیده گرفته ایم. هم چنین عبارت $\cdots$ نشان دهنده سهم جمله های دیگر است . در شکل (۵) حلقه های سمت چپ همه غیر مجاز هستند. این حلقه ها در رتبه دوم از کنار هم قرار گرفتن مسیرهای مجاز در رتبه اول یعنی

$\alpha^+,\ \alpha^-,\ \beta^+,\ \beta^-$ پدیدار می شوند. اما با وزن هایی که قرار داده ایم سهم این مسیرها توسط مسیرهای مجاز γ^+ و γ^- حذف می شوند. در واقع می خواهیم نشان دهیم که تساوی زیر برقرار است:

$$\gamma^+ + \gamma^- + \frac{1}{2}(2\alpha^+\beta^+ + 2\alpha^+\beta^- + 2\alpha^-\beta^+ + 2\alpha^-\beta^-) = 0 \qquad (۵۸)$$

برای این کار فقط به وزن ها نگاه کنیم و از ضریب τ^l که برای هر دو مسیر یکی است توجه نمی کنیم. داریم:

$$\alpha^+ = \alpha^- = \beta^+ = \beta^- = \frac{e^{\frac{-\pm i\pi}{4}\times 4}}{-2} = \frac{1}{2}, \qquad (۵۹)$$

$$\gamma^\pm = \frac{e^{\frac{\mp i\pi}{4}\times 0}}{-2} = \frac{-1}{2}. \qquad (۶۰)$$

بنابراین رابطه (۵۸) برقرار خواهد شد.

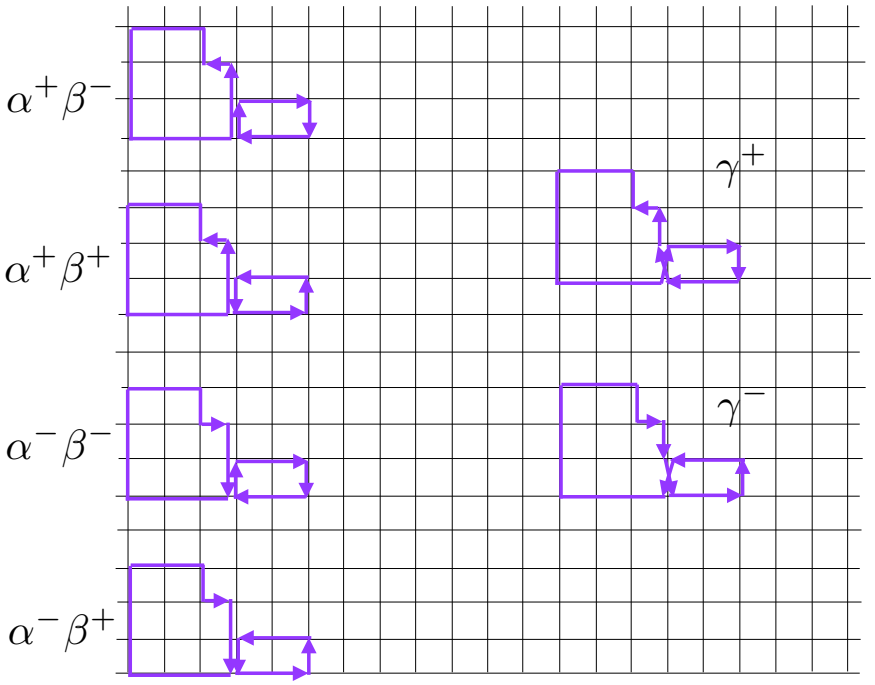
- **نکته مهم:** در همه جای فیزیک ما با روش های تقریبی روبرو هستیم چرا که تنها مسایل بسیار محدود و ایده آلی را می توان به صورت دقیق حل کرد و تقریبا هر مسئله واقعی ای را می بایست با استفاده از روش های تقریبی حل کرد. برای حل این نوع مسایل در هر شاخه ای از فیزیک یک نوع روش های اختلالی [۱۲] ابداع شده است. در این روشهای اختلالی همواره پارامتر کوچکی وجود دارد که نشان می دهد اهمیت جمله های بالاتر بسط به مرور کم و کم تر می شوند. بسته به میزان دقتی که می خواهیم می توانیم تنها چند جمله اول از بسط های اختلالی را نگاه داریم و کمیت های فیزیکی مورد علاقه خود را با تقریب دلخواه حساب کنیم. اما بعضی از سوالات مهم را نمی توان با بسط اختلالی ، هر چقدر هم که جملات بیشتری را نگاه داریم به طور قاطع پاسخ داد. تابع پارش مدل آیزینگ به هر صورت که محاسبه اش کنیم در بسط اختلالی همواره مجموع تعداد محدودی جملات تحلیلی است و در نتیجه در هر نوع بسطی این تابع یک تابع تحلیلی خواهد بود و هیچ گونه تکینگی از خود نشان نخواهد داد. (برای نمونه به تابع

$$1 + x + x^2 + \cdots x^N$$

توجه کنید که به ازای هر مقداری از N همواره یک تابع تحلیلی از x است و تنها وقتی که N به سمت بی نهایت میل می کند به صورت $\frac{1}{1-x}$ در می آید و تکینگی اش آشکار می شود.)

آنچه که در حل دقیق مدل آیزینگ نشان داده شده در واقع اثبات دقیق این امر است که در دو بعد یک گذار فاز رخ می دهد. در واقع با حل دقیق مدل آیزینگ شما اولین محاسبه غیراختلالی خود را انجام داده اید. اما توجه کنید که آنچه در این جا نشان داده ایم تنها یک مثال

[۱۲] Perturbative Method



شکل ۵: حلقه های سمت چپ همه غیر مجاز هستند. این حلقه ها در رتبه دوم از کنار هم قرار گرفتن مسیرهای مجاز در رتبه اول یعنی α^+, α^-, β^+, β^- پدیدار می شوند. اما با وزن هایی که قرار داده ایم سهم این مسیرها توسط مسیرهای γ^+ و γ^- که خود نیز غیر مجاز هستند، حذف می شوند.

است و برای اثبات دقیق می بایست نشان دهیم که این نوع حذف ها در همه رتبه های اختلال رخ می دهد و دقیقا همین نوع ملاحظات است که بدست آوردن نتایج غیراختلالی [۱۳] را در هر موضوعی از فیزیک، خواه در مکانیک آماری و فیزیک ماده چگال، خواه در فیزیک ذرات بنیادی و نظریه میدان، بی اندازه دشوار و در عین حال جذاب می کند.

[۱۳] Non-perturbative Results

۲.۵ شمارش دقیق مسیرهای نامتقاطع

حال به نقطه ای رسیده ایم که می توانیم شمارش منحنی ها را بدون نگرانی از دوباره شماری آنها و یا شمارش منحنی های غیر مجاز شروع کنیم. هدف ما آن است که تعداد مسیرهای بسته به طول l را که یک ذره می تواند درشبکه طی کند بشماریم. فرض کنید که تعداد این مسیرها وقتی که این ذره از نقطه مبدأ شروع به حرکت کند برابربا n_l باشد. دراین صورت تعداد کل مسیر هایی که می تواند درشبکه طی کند برابر است با $N_l := \frac{Nn_l}{l}$. بنابراین کافی است که خود را محدود به مسیرهایی کنیم که از مبدأ شروع می شوند. مسئله ما حالا یک شکل کاملاً مشخص پیدا کرده است که درزیر برای وضوح آن را دو باره می نویسیم:

- **مسئله:** متحرکی از مبدأ شروع به حرکت می کند. درهرگام که به جلو برمی دارد وزن τ را ذخیره می کند، درهر گردش به راست وزن $\tau e^{i\frac{\pi}{4}}$ و درهر گردش به چپ وزن $\tau e^{-\frac{i\pi}{4}}$ را ذخیر می کند . درهرگام که به عقب برمی دارد نیز وزن صفر را ذخیره می کند. وقتی که این متحرک به نقطه مبدأ بازمی گردد وزنی را ذخیره کرده است . می خواهیم بدانیم که کل وزنی را که این ذره می تواند با طی کردن تمام مسیرهای ممکن با طول l ذخیره کند چقدراست. هرگاه این وزن کل را محاسبه کنیم با تقسیم آن بر $2l$ تعدادکل مسیرهای بسته یه طول l ، یعنی n_l را بدست می آوریم. قبل از اینکه حل مسئله کلی را بنویسیم به این تمرین توجه کنید و آن را حل کنید.
- **تمرین:** فرض کنید که ذره از نقطه $(0,0)$ شروع به حرکت می کند و پس از طی k قدم به نقطه (x,y) می رسد. در این صورت وزن کلی که جمع کرده است را با $M_k(x,y)$ نشان می دهیم. . مسیرها می توانند خود را قطع کنند یا نکنند. مقادیر زیر را مستقیما حساب کنید:

$$M_2(2,2), \qquad M_3(2,2), \qquad M_4(2,2), \qquad M_5(2,2), \qquad M_6(2,2). \tag{۶۱}$$

هم چنین مقادیر زیر را حساب کنید:

$$M_6(3,3), \qquad M_8(3,3), \qquad M_10(3,3), \qquad M_12(3,3), \qquad M_9(3,3). \tag{۶۲}$$

با توجه به تعریف هایی که قبلا داشته ایم داریم:

$$M_l(0,0) \equiv n_\omega(l,\tau).$$

چگونه می توان چنین چیز پیچیده ای را حساب کرد؟ راه اش نوشتن یک رابطه تکرار است. مثلا شاید بتوان $M_l(0,0)$ را به $M_{l-1}(0,0)$ ربط داد. به یک مرتبه نمی توانیم چنین رابطه تکراری را بنویسیم بلکه می بایست مرحله به مرحله پیش برویم. مثلا می توان $M_l(x,y)$ را به

$M_{l-1}(x',y')$ ربط داد که در آن (x',y') یکی از همسایه های (x,y) است. کمی که بیشتر فکر کنیم متوجه می شویم که $M_l(x,y)$ را می بایست به صورت زیر تجریه کنیم و بشکنیم. قدم آخری که ذره برای رسیدن به نقطه (x,y) بردارد می تواند رو به بالا، رو به پایین، رو به سمت راست و یا رو به سمت چپ باشد که وزن های مربوطه را به ترتیب با $M_l^u(x,y)$، $M_l^d(x,y)$، $M_l^r(x,y)$ و $M_l^l(x,y)$ نشان می دهیم. در نتیجه داریم:

$$M_l(x,y) = M_l^u(x,y) + M_l^d(x,y) + M_l^r(x,y) + M_l^l(x,y).$$

حال برای این توابع می توانیم یک رابطه تکرار بنویسیم:

- **حل مسئله:** متحرک از نقطه $(0,0)$ شروع به حرکت می کند و وقتی که بعد از طی کردن k گام به نقطه (x,y) می رسد وزن $M_k(x,y)$ را ذخیره کرده است. هرگاه آخرین گام را برای رسیدن به نقطه (x,y) به طرف راست بردارد این وزن را با ${M^r}_k(x,y)$ نشان می دهیم. همینطور وزن های ${M^l}_k(x,y)$ ، ${M^u}_k(x,y)$ و ${M^d}_k(x,y)$ را مطابق با اینکه آخرین گام را به طرف چپ، بالا و یاپایین بردارد تعریف می کنیم.

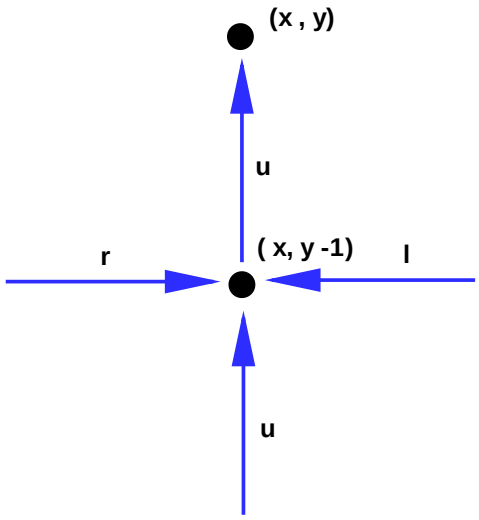
- **تمرین:** برای اینکه بیشتر با توابع بالا آشنا شوید، عبارت های زیر را حساب کنید:

$$M_2^u(x,y), \qquad M_2^d(x,y), \qquad M_2^r(x,y), \qquad M_2^l(x,y). \tag{۶۳}$$

$$M_3^u(x,y), \qquad M_3^d(x,y), \qquad M_3^r(x,y), \qquad M_3^l(x,y). \tag{۶۴}$$

برای محاسبه این توابع برای تعداد گام های دلخواه، یک معادله تکراربرای این وزن ها به شکل زیر می نویسیم که درآن $\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}}$ و $\beta = e^{\frac{-i\pi}{4}}$. نگاه کنید به شکل (۶).

$$\begin{aligned}
{M^u}_k(x,y) &= \tau {M^u}_{k-1}(x,y-1) + 0\ {M^d}_{k-1}(x,y-1) + \beta\tau {M^r}_{k-1}(x,y-1) + \alpha\tau {M^l}_{k-1}(x,y-1) \\
{M^d}_k(x,y) &= 0\ {M^u}_{k-1}(x,y+1) + \tau {M^d}_{k-1}(x,y+1) + \alpha\tau {M^r}_{k-1}(x,y+1) + \beta\tau {M^l}_{k-1}(x,y+1) \\
{M^r}_k(x,y) &= \alpha\tau {M^u}_{k-1}(x-1,y) + \beta\tau {M^d}_{k-1}(x-1,y) + \tau {M^r}_{k-1}(x-1,y) + 0\ {M^l}_{k-1}(x-1,y)
\end{aligned}$$



شکل ۶: شکلی که منجر به نوشتن اولین سطر از معادلات تکرار شده است. برای سطر های دیگر نیز شکل های مشابه وجود دارد.

$$M^l{}_k(x,y) = \beta\tau M^u{}_{k-1}(x+1,y) + \alpha\tau M^d{}_{k-1}(x+1,y) + 0\ M^r{}_{k-1}(x+1,y) + \tau M^l{}_{k-1}(x+1,y) \quad (۶۵)$$

روابط تکرار فوق برحسب مود های فوریه ساده تر می شوند:

$$\hat{M}^a_k(p,q) = \sum_{x,y} e^{ipx+iqy} M^a{}_k(x,y) \qquad a = u,\ d,\ r,\ l. \quad (۶۶)$$

$$M^a(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq e^{e^{-ipx-iqy}} M^a(p,q). \quad (۶۷)$$

رنتیجه روابط تکرار به صورت زیر درمی آیند:

$$\begin{aligned}
\hat{M}^u_k(p,q) &= \tau e^{iq}\left(\hat{M}^u_{k-1}(p,q) + 0\ \hat{M}^d_{k-1}(p,q) + \beta\hat{M}^r_{k-1}(p,q) + \alpha\hat{M}^l_k(p,q)\right)\\
\hat{M}^d_k(p,q) &= \tau e^{-iq}\left(0\ \hat{M}^u_{k-1}(p,q) + \hat{M}^d_{k-1}(p,q) + \alpha\hat{M}^r_{k-1}(p,q) + \beta\hat{M}^l_k(p,q)\right)\\
\hat{M}^r_k(p,q) &= \tau e^{ip}\left(\alpha\hat{M}^u_{k-1}(p,q) + \beta\hat{M}^d_{k-1}(p,q) + \hat{M}^r_{k-1}(p,q) + 0\ \hat{M}^l_k(p,q)\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{M}_k^l(p,q) \quad = \quad \tau e^{-ip}\left(\beta\hat{M}_{k-1}^u(p,q) + \alpha\hat{M}_{k-1}^d(p,q) + 0\ \hat{M}_{k-1}^r(p,q) + \hat{M}_k^l(p,q)\right) \tag{۶۸}$$

این رابطه را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_k^u(p,q) \\ \hat{M}_k^d(p,q) \\ \hat{M}_k^r(p,q) \\ \hat{M}_k^l(p,q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau e^{iq} & 0 & \tau e^{iq}\beta & \tau e^{iq}\alpha \\ 0 & \tau e^{-iq} & \tau e^{-iq}\alpha & \tau e^{-iq}\beta \\ \tau e^{ip}\alpha & \tau e^{ip}\beta & \tau e^{ip} & 0 \\ \tau e^{-ip}\beta & \tau e^{-ip}\alpha & 0 & \tau e^{-ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{M}_{k-1}^u(p,q) \\ \hat{M}_{k-1}^d(p,q) \\ \hat{M}_{k-1}^r(p,q) \\ \hat{M}_{k-1}^l(p,q) \end{pmatrix} \tag{۶۹}$$

که می توان آن را به شکل خلاصه زیر نوشت :

$$|\hat{M}_k(p,q)\rangle = S|\hat{M}_{k-1}(p,q)\rangle \tag{۷۰}$$

و یا بازهم به صورت خلاصه تر

$$|\hat{M}_l(p,q)\rangle = S^{l-1}|\hat{M}_1(p,q)\rangle \tag{۷۱}$$

حال احتیاج به شرایط اولیه داریم . متحرک می تواند قدم اول را به سمت بالا یا پایین یا چپ یا راست بردارد. همه مسیرهایی که قدم اول شان با هم متفاوت باشند مسیرهای کاملا متفاوتی هستند. بنابراین برای شمارش همه مسیرها می بایست مسیرهای مربوط به چهار شرط اولیه متفاوت را حساب کرده و سپس همه آنها را با هم جمع کنیم.

- **تمرین:** عبارت های زیر را حساب کنید:

$$M_1^u(x,y) \qquad M_1^d(x,y) \qquad M_1^r(x,y) \qquad M_l^u(x,y). \tag{۷۲}$$

- **تمرین:** عبارت های زیر را حساب کنید:

$$M_1^u(p,q) \qquad M_1^d(p,q) \qquad M_1^r(p,q) \qquad M_l^u(p,q). \tag{۷۳}$$

بسته به این که متحرک قدم اول را در کدام جهت بردارد بردار $|\hat{M}_1(p,q)\rangle$ یکی از بردارهای زیر خواهد بود.

$$|\hat{M}_1(p,q)\rangle = \begin{pmatrix} \tau e^{iq} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\hat{M}_1(p,q)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau e^{-iq} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\hat{M}_1(p,q)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e^{ip} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\hat{M}_1(p,q)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau e^{-ip} \end{pmatrix} \quad (۷۴)$$

می بایست وزن کل بدست آمده را برای چهارنوع شرایط اولیه بالا با هم جمع کنیم. بنابراین با توجه به خطی بودن معادله (71) می توانیم ماتریس های بالا را با هم جمع کنیم و بنویسیم :

$$|\hat{M}_l(p,q)\rangle = S^{l-1}|M_1(p,q)\rangle \qquad |\hat{M}_1(p,q)\rangle = \begin{pmatrix} \tau e^{iq} \\ \tau e^{-iq} \\ \tau e^{ip} \\ \tau e^{-ip} \end{pmatrix} \quad (۷۵)$$

هدف ماپیداکردن کمیت زیراست :

$$n_l = \frac{-1}{2}(M_l^u(0,0) + M_l^d(0,0) + M_l^r(0,0) + M_l^l(0,0)). \quad (۷۶)$$

با تعریف یک برداری سطری به صورت

$$\langle u| = (1,1,1,1) \quad (۷۷)$$

می توان نوشت:

$$n_l = \frac{-1}{2}\langle u|M_l(0,0)\rangle \quad (۷۸)$$

که با توجه به رابطه (66) برابر است با :

$$n_l = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} dpdq\langle u|\hat{M}_l(p,q)\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} dpdq\langle u|S^{l-1}|\hat{M}_1(p,q)\rangle \qquad (۷۹)$$

ماتریس S را قطری کنیم و ویژه مقدارهای آن را با λ_1 تا λ_4 نشان می دهیم که به ترتیب متناظر با ویژه بردارهای $|e_1\rangle$ تا $|e_4\rangle$ هستند.

در این صورت خواهیم داشت :

$$n_l = \frac{-1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} dp\int_0^{2\pi} dq\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^{l-1}\langle u|e_i\rangle\langle e_i|\hat{M}_1\rangle \qquad (۸۰)$$

و درنتیجه

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(\tau) \equiv \sum_1^l \frac{Nn_l}{l} &= \frac{-N}{4\pi^2}\sum_1^l\frac{1}{l}\int_0^{2\pi} dp\int_0^{2\pi} dq\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^{l}\langle u|e_i\rangle\langle e_i|\hat{M}_1\rangle \\ &= \frac{N}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} dp\int_0^{2\pi} dq\sum_{i=1}^{4}\ln(1-\lambda_i)\langle u|e_i\rangle\langle e_i|\hat{M}_1\rangle \end{aligned} \qquad (۸۱)$$

بنابراین مسئله منتهی می شود به پیداکردن ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس S. ب

■ **تمرین:** ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس S را پیدا کنید.

بعد از آنکه $Q^{(1)}(\tau)$ را از رابطه بالا پیداکردیم یافتن تابع پارش و انرژی آزاد سرراست است. خواهیم داشت:

$$Z = (2\cosh^2 K)^N e^{NQ\tilde{(1)}(\tau)} \qquad (۸۲)$$

که درآن $\tilde{Q}^{(1)}(\tau) := \frac{1}{N}Q^{(1)}(\tau)$ و ازآنجا

$$f(K) := \frac{-kT}{N}\ln Z = -kT\left(\ln(2\cosh^2 K) + \tilde{Q}^{(1)}(\tau)\right) \qquad (۸۳)$$

با کمی محاسبه بیشتر می توان نشان داد که تابع انرژی آزاد مدل آیزینگ در غیاب میدان مغناطیسی به صورت زیر درمی آید:

$$\beta f(\beta) = -\ln 2 - \frac{1}{2(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} dp_x\int_0^{2\pi} dp_y \ln\Big[\cosh^2 2\beta J - \sinh(2\beta J)(\cos p_x + \cos p_y)\Big]. \qquad (۸۴)$$

از این عبارت می توان نشان داد که تابع انرژی آزاد هلمهولتز، تابع انرژی کل و هم چنین ظرفیت گرمایی ویژه همگی در نقطه $T_c := \frac{2J}{\ln(\sqrt{2}+1)}$ دارای تکینگی هستند. برای آنکه نشان دهیم در دمای پایین تر از این، نظم خود به خودی پدیدار می شود، می بایست مغناطش متوسط را حساب

کنیم. اما این کار از تابع پارش کنونی که در غیاب میدان مغناطیسی انجام شده غیر ممکن است. این کار را نخستین بار سی. ان. یانگ [۱۴] با محاسبه تابع پارش در میدان مغناطیسی بی نهایت کوچک انجام داده که خواننده می تواند برای فهمیدن آن به مقاله اصلی یانگ [۱۵] رجوع کند.

۶ مسئله ها

- مسئله یک : (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) مدل آیزینگ را با میدان مغناطیسی ولی با شرایط مرزی ثابتِ زیر در نظر بگیرید:

$$S_1 = 1, \qquad S_N = 1. \tag{۸۵}$$

با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را حساب کنید و نشان دهید که در حد ترمودینامیک انرژی آزاد با آنچه که تحت شرایط مرزی پریودیک بدست می آورید یکی است.

- مسئله دو: (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) مدل آیزینگ را با شرایط مرزی آزاد در نظر بگیرید به این معنا که اسپین های سر و ته زنجیره می توانند هر مقداری را اختیار کنند ولی الزاما با هم برابر نیستند. با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را حساب کنید و نشان دهید که در حد ترمودینامیک انرژی آزاد با آنچه که تحت شرایط مرزی پریودیک بدست می آورید یکی است.

- مسئله سه: (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) مدل آیزینگ را در میدان مغناطیسی صفر در نظر بگیرید ولی فرض کنید که ثابت جفتیدگی اسپین های مجاور به ترتیب J و $J-$ است. تابع پارش را بدست آورید و از روی آن انرژی آزاد را محاسبه کنید.

- مسئله چهار: (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) یک سیستم یک بعدی اسپین با هامیلتونی پادفرومغناطیسی زیر در نظر بگیرید:

$$H = J\sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1} - B\sum_{i=1}^{N}(-1)^i S_i \tag{۸۶}$$

[۱۴] C. N. Yang

[۱۵] C.N. Yang, Phys. Rev. **85**, 809 (1952).

شرایط مرزی را پریودیک در نظر بگیرید و طول رشته را طوری بگیرید که این نوع شرط امکان پذیر باشد. حال تابع پارش را محاسبه کنید و سپس مغناطش متناوب را که به صورت زیر تعریف می شود حساب کنید:

$$M_s := \langle \sum_{i=1}^{N} (-1)^i S_i \rangle. \tag{۸۷}$$

تغییرات M_s را به B حساب کنید. می توانید این کمیت را χ_s بنامید.

■ مسئله پنج :(موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) یک زنجیره اسپینی را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید:

$$H = \sum_{i=1}^{N} -JS_iS_{i+1} - KS_iS_{i+2} - B\sum_{i=1}^{N} S_i. \tag{۸۸}$$

در این زنجیره هر اسپین با نزدیک ترین همسایه و هم چنین همسایه بعدی اش برهم کنش می کند. آیا این مدل گذار فاز از خود نشان می دهد؟ مغناطش را بر حسب میدان مغناطیسی بدست آورید. آیا مغناطش خود بخود پدیدار می شود؟

■ مسئله شش: (موعد تحویل: ۱۰ خردادماه ۱۳۹۹) در متن درس تابع همبستگی را برای مدل آیزینگ از روش مستقیم حساب کردیم. حال با استفاده از روش ماتریس انتقال و استفاده از رابطه $G(i,j) = kT\frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j}$ تابع همبستگی را حساب کنید.

■ مسئله هفت: (موعد تحویل: ۱۰ خرداد ماه ۱۳۹۹) مدل $Q - StatePotts$ به صورت زیر تعریف می شود. در هر نقطه ی i از شبکه یک متغیر S_i وجود دارد که می تواند Q متغیر متمایز از مجموعه $\{1, 2, \cdots Q\}$اختیار کند.

هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = -J\sum_{i=1}^{N} \delta_{S_i, S_{i+1}} \tag{۸۹}$$

در این مسئله توجه خود را به حالت $Q = 3$ معطوف می کنیم.

الف: زنجیره را باز بگیرید و با هر روشی که می توانید تابع پارش این مدل را حساب کنید. متوسط $\langle S_i \rangle$ و تابع همبستگی $\langle S_i S_j \rangle$ را حساب کنید. طول هم بستگی را بدست آورید.

ب: یک میدان خارجی اضافه کنید که در اثر آن هامیلتونی به شکل زیر در می آید:

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \delta_{S_i, S_{i+1}} - B \sum_{i=1}^{N} \delta_{S_i, 1}. \qquad (۹۰)$$

با محاسبه تابع پارش متوسط $\langle S_i \rangle$ را حساب کنید. در این قسمت شرایط مرزی را پریودیک در نظر بگیرید.

- مسئله هشت: (موعد تحویل: ۱۰ خرداد ماه ۱۳۹۹) در مدل آیزینگ بدون میدان مغناطیسی و با شرایط مرزی پریودیک احتمال این را که 3 اسپین مجاور مقدار یکسان داشته باشند را حساب کنید. نتیجه خود را به k اسپین تعمیم دهید.

- مسئله نه: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) مدل آیزینگ را روی یک زنجیره باز با طول N در نظر بگیرید. فرض کنید میدان مغناطیسی نیز برابر با صفر است. به حالتی که k تا اسپین سمت چپ همه در یک حالت مثلاً $+1$ هستند و بقیه اسپین های سمت راست در حالت -1 هستد اصطلاحا حالتی با یک دیواره حوزه [۱۶] می گویند.

الف: احتمال اینکه در سیستم یک دیواره حوزه وجود داشته باشد چقدراست؟

ب: احتمال اینکه در یک سیستم 2 تا دیواره حوزه وجود داشته باشد چقدر است؟

ج: انرژی یک حالت برحسب تعداد دیواره های حوزه ای که دارد بنویسید. با شمارش تعداد حالت هایی که دارای k تا دیواره حوزه دارند تابع پارش مدل آیزینگ را حساب کنید.

[۱۶] Domain Wall

د: تعداد متوسط دیواره های حوزه را در یک دمای خاص حساب کنید.

■ مسئله ده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) مدل $3 - StatePotts$ را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید: شرایط مرزی را پریودیک در نظر بگیرید:

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \delta_{S_i, S_{i+1}}. \qquad (۹۱)$$

الف: تابع پارش این سیستم را حساب کنید.

ب: احتمال اینکه دو تا سایت متوالی در یک حالت قرار داشته باشند را محاسبه کنید.

پ: احتمال اینکه سه تا سایت متوالی در یک حالت قرار داشته باشند را حساب کنید.

■ مسئله یازده: با استفاده از بسط دمای بالا تابع پارش مدل آیزینگ یک بعدی را وقتی که میدان مغناطیسی صفر است به طور دقیق بدست آورید. هم چنین با استفاده از این روش تابع همبستگی بین دو اسپین را بدست آورید. شرایط مرزی را پریودیک در نظر بگیرید.

■ مسئله دوازده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) تابع پارش مدل آیزینگ دو بعدی را در غیاب میدان مغناطیسی تا مرتبه τ^8 بدست آورید. در این جا $\tau = \tanh(\frac{J}{kT})$. هم چنین تا این رتبه تابع همبستگی بین دو اسپین دلخواه را بدست آورید.

■ مسئله سیزده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹)روشی را که برای بسط دمای بالا در مدل آیزینگ به کار بردیم برای مدلQ حالته پاتز $Potts$ در دو بعد تعمیم دهید. پارامتر اختلال را مشخص کنید. جملات اول بسط اختلالی برای تابع پارش را بدست آورید.

- مسئله چهارده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) مدل ۳ حالته پاتز را روی یک شبکه یک بعدی با شرایط مرزی پریودیک در نظر بگیرید. با استفاده از بسط دمای بالا تابع پارش این مدل را به صورت دقیق حساب کنید. آیا این مدل از خود گذار فاز نشان می دهد؟

- مسئله پانزده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) در مدل آیزینگ دو بعدی فرض کنید که دما پایین است یعنی $kT << J$. تابع پارش را تا مرتبه ۸ از پارامتر $\epsilon := e^{-\frac{J}{kT}}$ بدست آورید.

---

۷ ضمیمه: قضیه پرون-فروبنیوس

روش ماتریس انتقال بخصوص وقتی که توابع همبستگی را حساب می کنیم متکی است بر قضیه پرون ـفروبنیوس [۱۷] . این قضیه بیان می کند که هرگاه درایه های یک ماتریس T اکیدا مثبت باشند آنگاه بزرگترین مقدار ویژه این ماتریس یکتاست و واگنی ندارد.

نخست به این نکته توجه می کنیم که ردً ماتریس T مثبت است بنابراین بزرگترین ویژه مقدار آن حتما مثبت است . برای بقیه اثبات نخست به قضیه نخست به قضیه رایلی [۱۸] توجه می کنیم. بر مبنای این قضیه هرگاه یک ماتریس هرمیتی T داشته باشیم، و کمیت $\langle v|T|v\rangle$ در مجموعه بردارهای بهنجار $|v\rangle$ حساب کنیم، نقاط اکسترمم این تابع همان ویژه بردارهای T هستند. برای اثبات این تابع کافی است که با استفاده از ضرایب لاگرانژ وردش رتبه یک تابع

$$F(v) := \langle v|T|v\rangle - \lambda\langle v|v\rangle \qquad (۹۲)$$

را مساوی با صفر قرار دهیم. این وردش منجر خواهد شد به:

$$\langle \delta v|(T-\lambda I)|v\rangle + \langle v|(T-\lambda I)|\delta v\rangle = 0. \qquad (۹۳)$$

[۱۷] Peron-Ferrobenius
[۱۸] Rayleigh

هرگاه به جای δv قرار دهیم $i\delta v$ به جای رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\langle \delta v|(T-\lambda I)|v\rangle - \langle v|(T-\lambda I)|\delta v\rangle = 0. \qquad (۹۴)$$

که در نتیجه ترکیب دو رابطه به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید یعنی $T|v\rangle = \lambda|v\rangle$ که در ضمن بیان می کند ضریب لاگرانژ همان ویژه مقدار است. این خاصیت برای همه ویژه مقدار ها برقرار است.اما برای بزرگترین ویژه مقدار یک خاصیت اضافه برقرار است به این معنا که نقطه مربوطه تنها اکسترمم نیست بلکه ماکزیمم است. برای فهم آن هم کافی است که عبارت $F(v_0+\delta v)$ را که در آن v_0 ویژه بردار مربوط به ویژه مقدار ماکزیمیم یعنی λ_{max} است ، تا رتبه دو بسط دهیم . در این صورت خواهیم داشت:

$$F(v+\delta v) = \langle v+\delta v|T|v+\delta v\rangle - \lambda\langle v+\delta v|v+\delta v\rangle = F(v) + \langle \delta v|T-\lambda_{max}|\delta v\rangle. \qquad (۹۵)$$

از انجا که λ_{max} بزرگترین ویژه مقدار است خواهیم داشت:

$$\langle \delta v|T-\lambda_{max}|\delta v\rangle = \langle \delta v|\sum_i(\lambda_i-\lambda_{max})|\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|\delta v\rangle \le 0. \qquad (۹۶)$$

که ادعای قضیه را ثابت می کند.

حال از این قضیه استفاده می کنیم و نشان می دهیم که هرگاه درایه های T اکیدا مثبت باشند یعنی$T_{ij}>0$ آنگاه درایه های $|v_0\rangle$ نیز اکیدا مثبت هستند یعنی $(v_0)_i > 0$. برای نشان دادن این موضوع به این نکته توجه می کنیم که فضای بردارهای بهنجار متناظر با یک کره و بنابراین بدون مرز است. در نتیجه تابع $F(v)$ در نقطه v_0 نه تنها یک ماکزیمم نسبی دارد بلکه این ماکزیمم مطلق است. از برهان خلف استفاده می کنیم و فرض می کنیم که v_0 یک یا چند درایه منفی دارد. حال دقت می کنیم که عبارت $F(v_0)$ مجموع جملات مثبت و منفی است. اما با ضرب کردن این درایه های در عدد -1 بردار دیگری بدست می آوریم که هم بهنجار است و هم مقدار عبارت $F(v)$ را بزرگتر می کند که با ماکزیمم بودن $F(v_0)$ بدیل به مقدار بمقدار بزرگتری حاصل کند. منافات دارد. بنابراین v_0 نمی تواند دارای هیچ درایه ی منفی ای باشد. حال ثابت می کنیم که هیچ کدام از درایه های v_0 صفر نیز نمی توانند باشند زیرا اگر مثلا درایه اول آن برابر با صفر باشند به این معناست که عبارت زیر صفر شده است

$$\sum_{j=1}^{d} T_{1j}v_j = 0 \qquad (۹۷)$$

که با توجه به مثبت اکید بودن مقادیر T_{ij} و نامنفی بودن v_j ها غیرممکن است. پس ثابت کردیم که تمام درایه های v_0 اکیدا مثبت هستند. اما می دانیم که نمی توان دو بردار متعامد از این گونه داشت و از آنجا که ویژه بردارهای ماتریس هرمیتی همه بر هم عمودند نتیجه می گیریم که

بزرگترین ویژه مقدار T واقعا غیر واگن است.

■ **قدردانی:** از بهروز بنیادی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳ که اشکالاتی از متن اولیه این درسنامه را به من یادآوری کردند تشکر می کنم.